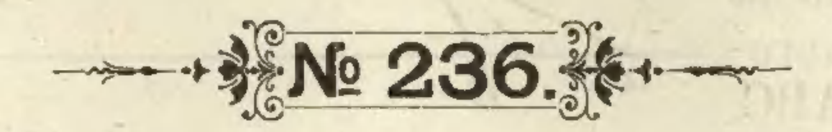
XX Сем. 10-го Апрѣля 1896 г. № 8.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ

и

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.



Содержаніе: Новая геометрія треугольника. (Продолженіе). *Д. Е.* — Математическія мелочи. Опредѣленіе площади и отношенія діагоналей вписаннаго въ кругъ четыреугольника. *Н. Николаева.*—Построеніе π съ точностью до 0,0001. *М. Ефимова.* — Опыты и приборы.—Изобрѣтенія и открытія.—Разныя извѣстія.—Задачи №№ 337—342.—Рѣшенія задачъ 2-й серіи №№ 485, 499 и 3-й серіи №№ 200, 201, 258, 259, 260, 265, 266, 272, 273, 275, 276, 278.—Полученныя рѣшенія задачъ.—Пропущенная подпись.—Обзоръ научныхъ журналовъ *Д. Е.*—Объявленія.

НОВАЯ ГЕОМЕТРІЯ

ТРЕУГОЛЬНИКА.

(Géométrie récente du triangle).

*(Продолженіе *).*

V. Взаимныя и обратныя точки треугольника.

1. Изотомическія точки и прямыя. Двѣ точки на сторонѣ треугольника, симметричныя относительно средины этой стороны, наз. *изотомическими точками* (points isotomiques).

Двѣ прямыя, соединяющія вершину треугольника съ изотомическими точками противолежащей стороны, наз. *изотомическими прямыми* (droites isotomiques).

2. Пусть AA′ и AA″, BB′ и BB″, CC′ и CC″ суть три пары изотомическихъ прямыхъ треугольника ABC. (Фиг. 39).

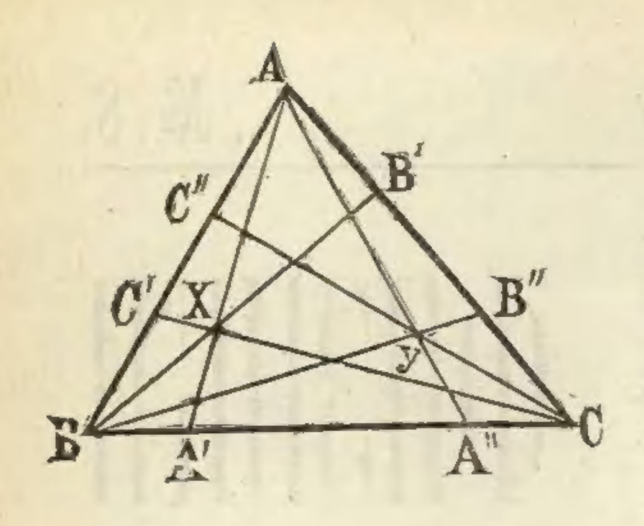
Теорема. *Если три прямыя AA′, BB′, CC′ пересѣкаются въ одной точкѣ X, то изотомическія съ ними прямыя AA″, BB″, CC″ также пересѣкаются въ одной точкѣ Y.*

---

*) См. „Вѣстника Оп. Физики“ №№ 230, 231, 232 и 234.

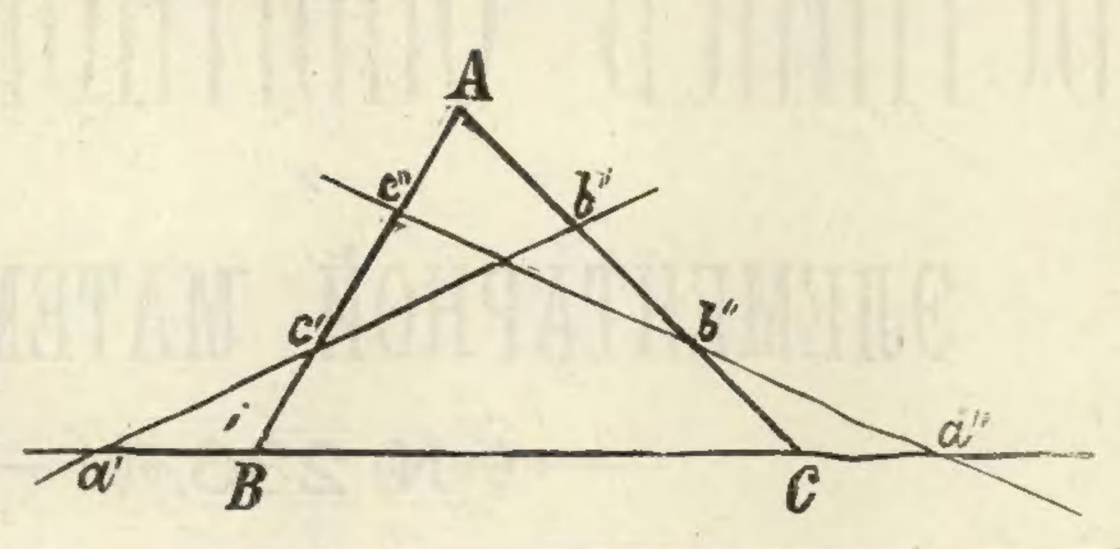
Доказательство основывается на теоремѣ *Чевы* и равенствѣ отрѣзковъ AB′ и CB″, BA′ и CA″, BC′ и AC″ (I, 4).

Обратно: Если двѣ пары изотомическихъ прямыхъ AA′ и AA″, BB′ и BB″ пересѣкаются въ точкахъ X и У (фиг. 39), то прямыя CX и CУ также изотомичны.



Фиг. 39

Точки X и У наз. *изотомически сопряженными* а также *взаимными точками* (points réciproques) треугольника ABC. (*Longchamps*).



Фиг. 40.

3. Пусть a' и a'', b' и b'', c' и c'' суть три пары изотомическихъ точекъ треугольника ABC (Ф. 40).

Теорема. *Если три точки* a′, b′, c′ *лежатъ на одной прямой* D, *то три изотомическія съ ними точки* a″, b″, c″ *также лежатъ на одной прямой* D′.

Доказательство основывается на теоремѣ *Птоломея* и опредѣленіи изотомическихъ точекъ. (I, 3).

Прямыя D и D′ наз. *изотомически сопряженными* или *взаимными сѣкущими*

Фиг. 41.

(transversales réciproques) треугольника ABC.

4. Пусть I, I_a, I_b, I_c суть центры вписаннаго и внѣвписанныхъ круговъ въ треугольникѣ ABC, стороны котораго суть $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Точки касанія этихъ круговъ съ сторонами BC, CA и AB обозначимъ соотвѣтственно черезъ (α, β, γ), $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$, $(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$. (Фиг. 41). Извѣстно, что:

$$A\beta = A\gamma = B\alpha_3 = C\alpha_2 = B\gamma_3 = C\beta_2 = p - a,$$

$$B\gamma = B\alpha = A\beta_3 = C\beta_1 = A\gamma_3 = C\alpha_1 = p - b,$$

$$C\alpha = C\beta = A\gamma_2 = B\gamma_1 = A\beta_2 = B\alpha_1 = p - c,$$

$$A\beta_1 = A\gamma_1 = p,$$

$$B\gamma_2 = B\alpha_2 = p,$$

$$C\alpha_3 = C\beta_3 = p,$$

гдѣ

$$p = \tfrac{1}{2}(a + b + c);$$

слѣдовательно

точки α, β, γ соотвѣтственно изотомичны съ α_1, β_2, γ_3;

„ $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ „ „ „ α, β_3, γ_2;

и т. д.

Но прямыя $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ пересѣкаются въ одной точкѣ I, называемой *точкой Жергона* (Gergonne I, 5); а потому прямыя $A\alpha_1$, $B\beta_2$, $C\gamma_3$, какъ изотомическія съ ними, также пересѣкаются въ одной точкѣ N, называемой *точкой Нагеля* (Nagel). Итакъ: *точка Жергона и точка Нагеля суть пара взаимныхъ или изотомически сопряженныхъ точекъ треугольника.*

5. Прямыя $A\alpha_1$, $B\beta_1$, $C\gamma_1$ пересѣкаются въ одной точкѣ T_a;

„ $A\alpha_2$, $B\beta_2$, $C\gamma_2$ „ „ „ T_b;

„ $A\alpha_3$, $B\beta_3$, $C\gamma_3$ „ „ „ T_c;

поэтому прямыя $A\alpha$, $B\beta_3$, $C\gamma_2$ изотомическія съ $A\alpha_1$, $B\beta_1$, $C\gamma_1$ пересѣкаются также въ одной точкѣ N_a; и т. д.

Точки T_a, T_b, T_c наз. *добавочными точками* (adjoints) *Жергона*; точки N_a, N_b, N_c наз. *добавочными точками Нагеля.*

Слѣдовательно: *добавочныя точки Жергона съ соотвѣтственными имъ добавочными точками Нагеля составляютъ три пары взаимныхъ или изотомически сопряженныхъ точекъ треугольника.*

6. Антипараллельныя прямыя. Двѣ прямыя L и L′ называются *антипараллельными* относительно сторонъ даннаго угла, если уголъ, составляемый прямой L съ одной стороной этого угла, равенъ углу, составляемому прямой L′ съ другой стороной того же угла.

Если антипараллельныя прямыя L и L′ пересѣкаютъ стороны угла A въ точкахъ B, C и B′, C′, то треугольники ABC и AC′B′ по-

добны, но не одинаково расположены; четыреугольникъ BCC'B' всегда вписывается въ кругъ.

Необходимое и достаточное условіе антипараллельности двухъ прямыхъ состоитъ въ томъ, что произведеніе отрѣзковъ, образуемыхъ ими на одной сторонѣ угла, равно произведенію отрѣзковъ, образуемыхъ ими на другой сторонѣ того же угла.

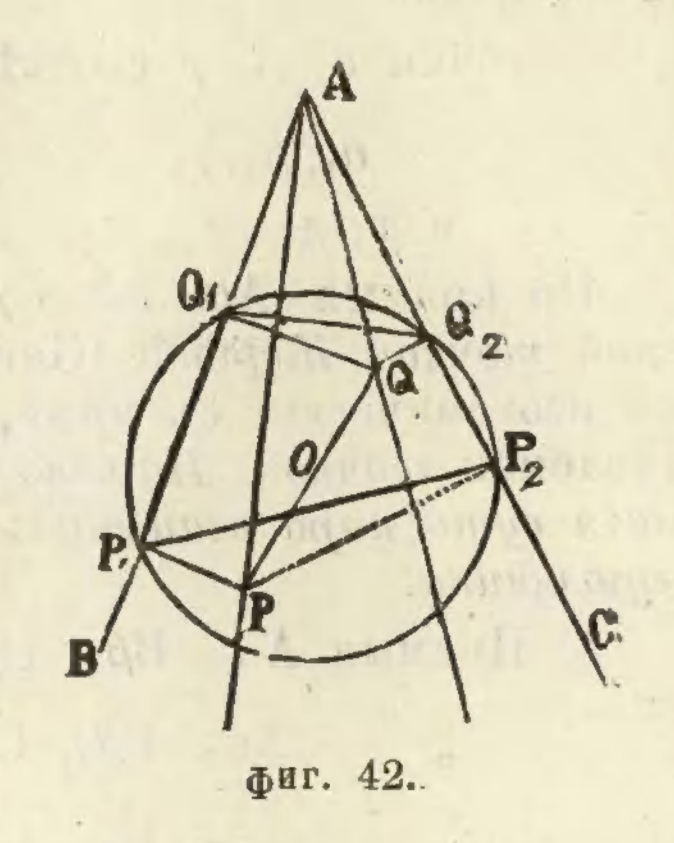
Хорды, соединяющія точки пересѣченія окружности съ двумя прямыми, антипараллельны.

7. Теорема. *Прямыя, антипараллельныя сторонамъ треугольника, параллельны касательнымъ въ его вершинахъ къ описанному около него кругу.*

Слѣдствіе. Прямыя, соединяющія основанія высотъ треугольника, антипараллельны его сторонамъ.

8. Изогональныя прямыя. *Изогональными* прямыми относительно даннаго угла (BAC) наз. двѣ прямыя (AP и AQ), проходящія черезъ вершины этого угла и симметричныя относительно его биссектрисы. (Фиг. 42).

Теорема. Если P и Q суть какія нибудь точки, взятыя на прямыхъ, изогональныхъ относительно угла BAC (фиг. 42), то



фиг. 42.

1) *Разстоянія точки* P *отъ* AB *и* AC *обратно пропорціональны разстояніямъ точки* Q *отъ тѣхъ же прямыхъ.*

Пусть P_1, Q_1 и P_2, Q_2 суть проэкціи точекъ P и Q на AB и AC. Такъ какъ треугольники APP_1 и AQQ_2, AQQ_1 и APP_2 попарно подобны, то

$$\frac{PP_1}{QQ_2}=\frac{AP}{AQ} \text{ и } \frac{PP_2}{QQ_1}=\frac{AP}{AQ};$$

слѣдовательно

$$\frac{PP_1}{PP_2}=\frac{QQ_2}{QQ_1}.$$

2) *Проэкціи точекъ* P *и* Q *на стороны угла* ABC *лежатъ на одной окружности, имѣющей центръ въ срединѣ отрѣзка* PQ.

Ибо прямыя P_1P_2 и Q_1Q_2 антипараллельны (6), такъ какъ

$$\frac{AP_1}{AQ_2}=\frac{AP}{AQ} \text{ и } \frac{AP_2}{AQ_1}=\frac{AP}{AQ}$$

откуда

$$\frac{AP_1}{AQ_2}=\frac{AP_2}{AQ_1}, \text{ т. е. } AP_1.AQ_1=AP_2.AQ_2.$$

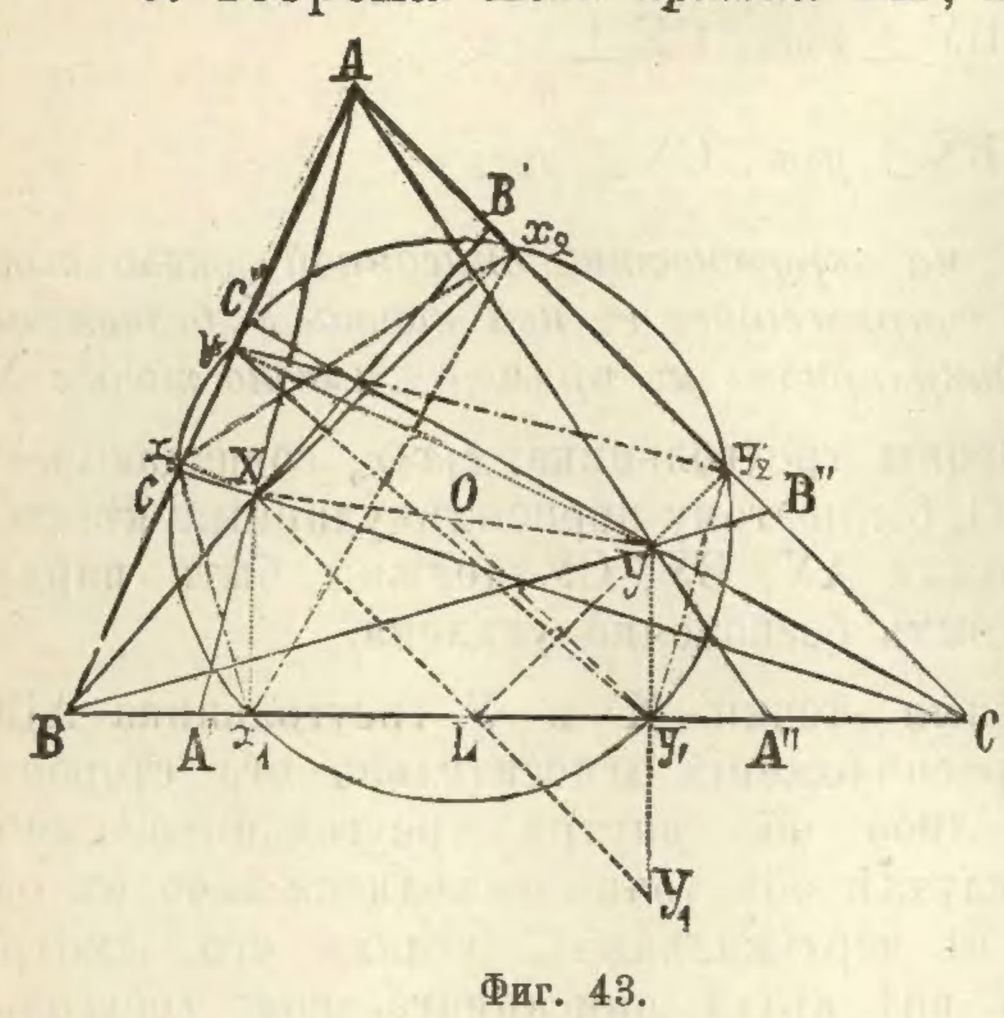
3) *Изогональныя прямыя* AP *и* AQ *соотвѣтственно перпендикулярны къ прямымъ* Q_1Q_2 *и* P_1P_2.

Дѣйствительно, описавъ окружность около четыреугольника AP_1PP_2, увидимъ, что

$$\angle AP_2P_1 = \angle APP_1 = 90^0 - \angle PAP_1 = 90^0 - \angle QAP_2;$$

слѣдовательно $AQ \perp P_1P_2$.

9. Теорема. *Если прямыя* AA′, BB′, CC′, *проходящія черезъ вершины треугольника* ABC, *пересѣкаются въ одной точкѣ* X, *то прямыя* AA″, BB″, CC″, *изогональныя съ первыми, пересѣкаются также въ одной точкѣ* У. (Фиг. 43).



Фиг. 43.

Пусть x_1, x_2, x_3 и y_1, y_2, y_3 суть проэкціи точки X и точки У, въ которой пересѣкаются прямыя AA″ и BB″, на стороны треугольника BC, CA и AB. По свойству изогональныхъ прямыхъ (8)

$$Xx_1 \,.\, Уy_1 = Xx_3 \,.\, Уy_3$$

и

$$Xx_2 \,.\, Уy_2 = Xx_3 \,.\, Уy_3;$$

слѣдовательно

$$Xx_1 \,.\, Уy_1 = Xx_2 \,.\, Уy_2,$$

а потому прямыя CX и CУ изогональны, т. е. прямая CC″ проходитъ черезъ точку У.

Точки X и У наз. *обратными* (inverses) или *изогонально-сопряженными точками* треугольника ABC. (*Vigarié*).

10. Обратныя точки треугольника совпадаютъ, если одна изъ нихъ есть центръ вписаннаго или внѣвписаннаго круга въ треугольникъ.

Ортоцентръ треугольника H *и центръ вписаннаго въ него круга* O *суть обратныя точки*; ибо прямыя AH и AO изогональны, такъ какъ сторона треугольника BC антипараллельна касательной въ A къ кругу, описанному около треугольника ABC.

Точки Брокара суть обратныя точки треугольника (III, 8).

11. Изъ свойствъ изогональныхъ прямыхъ (8) слѣдуетъ, что:

a) *Произведенія разстояній обратныхъ точекъ треугольника отъ каждой изъ сторонъ его равны между собою*, т. е. (фиг. 43).

$$Xx_1 \,.\, Уy_1 = Xx_2 \,.\, Уy_2 = Xx_3 \,.\, Уy_3.$$

b) *Проэкціи* x_1, x_2, x_3 *и* y_1, y_2, y_3 *обратныхъ точекъ треугольника на его стороны лежатъ на одной окружности, имѣющей центръ въ срединѣ* XУ.

Для ортоцентра и центра описаннаго круга (10) это есть окружность *круга девяти точекъ.* (I, 12).

c) *Прямыя, соединяющія одну изъ обратныхъ точекъ треугольника съ его вершинами, перпендикулярны къ прямымъ, соединяющимъ проэкціи другой обратной точки на его стороны,* т. е. (фиг. 43).

$$АУ \perp x_2x_3,\ ВУ \perp x_3x_1,\ СУ \perp x_1x_2$$

и

$$АХ \perp y_2y_3,\ ВХ \perp y_3y_1,\ СХ \perp y_1y_2.$$

12. *Если точка* Х *взята на окружности, описанной около треугольника* АВС, *то изогонально сопряженная съ ней точка* У *безконечно удалена въ направленіи, перпендикулярномъ къ прямой Симсона точки* Х.

Ибо въ этомъ случаѣ стороны треугольника $x_1x_2x_3$ совпадаютъ съ *прямой Симсона* для точки Х (I, 6); поэтому перпендикулярныя къ сторонамъ этого треугольника прямыя АУ, ВУ, СУ должны быть параллельны, т. е. точка У должна быть безконечно удалена.

13. Изогонально-сопряженныя точки Х и У треугольника АВС могутъ имѣть три различныя расположенія относительно его сторонъ, именно: точки эти находятся либо обѣ внутри треугольника, либо обѣ—внѣ его; въ послѣднемъ случаѣ обѣ точки находятся либо въ одномъ углѣ треугольника, либо въ вертикальныхъ углахъ его, смотря по тому, находятся ли онѣ обѣ внѣ круга, описаннаго около треугольника, или одна изъ нихъ взята внутри этого круга. *)

14. Теорема. *Три точки, симметричныя съ одной изъ обратныхъ точекъ треугольника относительно его сторонъ, лежатъ на окружности, описанной изъ точки, обратной съ первой, радіусомъ вдвое большимъ радіуса окружности, проходящей черезъ проэкціи тѣхъ же точекъ на стороны треугольника.*

Пусть $У_1$, $У_2$, $У_3$ суть точки, симметричныя съ У относительно сторонъ треугольника ВС, СА, АВ. Обозначивъ черезъ О средину ХУ, т. е. центръ круга $x_1y_1x_2y_2x_3y_3$ (фиг. 43), соединимъ О съ y_1 и Х съ $У_1$. Такъ какъ $ХУ = 2ОУ$ и $УУ_1 = 2Уy_1$, то $ХУ_1 = 2Оy_1$, что и требовалось доказать.

15. Слѣдствіе. Если прямыя $ХУ_1$, $ХУ_2$, $ХУ_3$ пересѣкаютъ стороны треугольника АВС въ точкахъ L, M, N, то (фиг. 43).

$$XL \pm УL = XM \pm УM = XN \pm УN,$$

гдѣ знакъ „+" имѣетъ мѣсто, когда точки Х и У находятся въ одномъ углѣ треугольника, а знакъ „—" когда онѣ находятся въ вертикальныхъ углахъ его.

16. Симедіаны (*Symédianes*). Прямыя, изогональныя съ медіанами треугольника, наз. *симедіанами* этого треугольника (*M. d'Ocagne*).

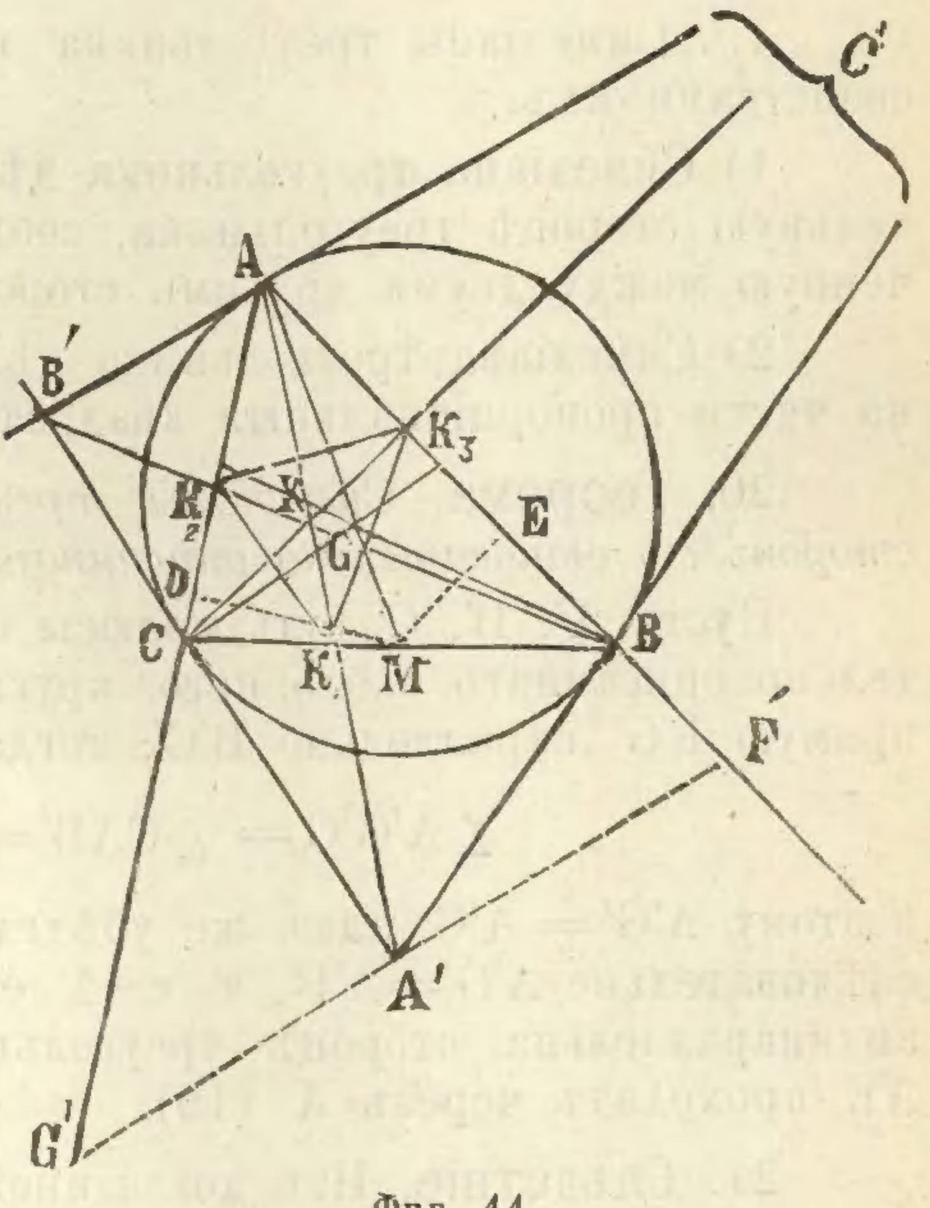
---

*) См. „Вѣстникъ" № 116, стран. 143.

Медіаны треугольника пересѣкаются въ одной точкѣ—центрѣ тяжести треугольника (G); поэтому (9) и *симедіаны треугольника пересѣкаются въ одной точкѣ* (K).

Точка пересѣченія симедіанъ треугольника (K) наз. *точкой Лемуана**) (Lemoine); слѣдовательно, точка Лемуана даннаго треугольника есть точка, изогонально сопряженная (обратная) съ центромъ тяжести этого треугольника.

17. Теорема. *Разстоянія точки Лемуана* (K) *отъ сторонъ треугольника пропорціональны этимъ сторонамъ.*



Фиг. 44.

Пусть M есть средина стороны BC треугольника ABC; g_1, g_2, g_3 — проэкціи его центра тяжести G на стороны BC, CA и AB; x, y, z — разстоянія точки Лемуана (K) отъ этихъ сторонъ (фиг. 44). По свойству обратныхъ точекъ (11):

$$\frac{y}{z} = \frac{Gg_3}{Gg_2} = \frac{ME}{MD};$$

но

$$ME.c = MD.b = S$$ (площ. треугольника);

отсюда

$$\frac{ME}{MD} = \frac{b}{c};$$

поэтому

$$\frac{y}{z} = \frac{b}{c};$$

слѣдовательно

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}.$$

18. Изъ свойствъ равныхъ отношеній слѣдуетъ, что

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{ax+by+cz}{a^2+b^2+c^2} = \frac{2S}{a^2+b^2+c^2}.$$

Изъ этихъ равенствъ опредѣляются разстоянія точки Лемуана отъ сторонъ треугольника.

Изъ тѣхъ же равенствъ слѣдуетъ, что *сумма квадратовъ разстояній точки Лемуана отъ сторонъ треугольника есть minimum.* Ибо, замѣнивъ въ тождествѣ

---

*) Точка Лемуана наз. также центромъ симедіанъ треугольника.

$$(x^2+y^2+z^2)(a^2+b^2+c^2)-(ay+by+cz)^2=$$
$$=(ay-bx)^2+(bz-cy)^2+(cx-az)^2$$

$ax+by+cz$ черезъ 2S, замѣтимъ, что сумма $x^2+y^2+z^2$ есть minimum, когда $ay-bx=0$, $bz-cy=0$, $cx-az=0$, т. е. при

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}.$$

19. Симедіаны треугольника вполнѣ опредѣляются слѣдующими свойствами ихъ.

1) Симедіана треугольника дѣлитъ пополамъ прямую, антипараллельную сторонѣ треугольника, соотвѣтствующей симедіанѣ, и заключенную между двумя другими сторонами его.

2) Симедіана треугольника дѣлитъ соотвѣтствующую сторону его на части пропорціональныя квадратамъ другихъ его сторонъ.

20. Теорема. *Симедіаны треугольника проходятъ черезъ полюсы сторонъ его относительно описаннаго около него круга.*

Пусть A′, B′, C′ суть полюсы сторонъ треугольника ABC относительно описаннаго около него круга (фиг. 44). Проведемъ черезъ A′ прямую F′G′ параллельно B′C′; тогда

$$\angle A'G'C=\angle CAB'=\angle ACB'=\angle A'CG';$$

поэтому $A'G'=A'C$; такъ же убѣдимся, что $A'F'=A'B$. Но $A'B=A'C$; слѣдовательно $A'G'=A'F'$, т. е. A′ есть середина F′G′; прямая же F′G′ антипараллельна сторонѣ треугольника BC; слѣдовательно, симедіана AK проходитъ черезъ A′ (19).

21. Слѣдствіе. Изъ доказанной теоремы слѣдуетъ, что *точка Лемуана* (K) есть центръ перспективы взаимно-полярныхъ треугольниковъ ABC и A′B′C′; отсюда замѣчаемъ, что *поляра точки Лемуана* (K) относительно круга ABC есть ось перспективы тѣхъ же треугольниковъ. (II, 1,15).

Поляра точки Лемуана относительно круга, описаннаго около треугольника, наз. *прямою Лемуана.*

По свойству поляры, прямая Лемуана перпендикулярна къ прямой, соединяющей центръ круга O, описаннаго около треугольника, съ его точкой Лемуана K, и отстоитъ отъ O на разстояніе $=\frac{R^2}{OK}$ (II, 10).

22. Обозначимъ черезъ K_1, K_2, K_3 точки пересѣченія симедіанъ треугольника съ сторонами его BC, CA, AB; черезъ A′, B′, C′ — точки пересѣченія касательныхъ въ A, B, C къ кругу ABC.

Точки A′, B′, C′, какъ полюсы сторонъ треугольника ABC относительно описаннаго около него круга, *гармонически связаны* съ точкой Лемуана K (III, 13).

Такъ какъ треугольники ABC, A′B′C′, $K_1K_2K_3$ попарно перспективны и имѣютъ общій центръ перспективы въ точкѣ Лемуана K, то прямая Лемуана есть общая ось перспективы этихъ треугольниковъ;

эта прямая, слѣдовательно, есть *трилинейная поляра* точки К. (II, 3; III, 14).

23. Теорема. *Если* x, y, z, *суть разстоянія точки Лемуана треугольника* ABC *отъ сторонъ его* a, b, c, *то уголъ* ω, *опредѣляющійся равенствомъ*

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{tg}\omega=\frac{x}{a}\left(=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}\right),$$

есть уголъ Брокара того же треугольчика.

Ибо (18)

$$\mathrm{tg}\omega=\frac{2x}{a}=\frac{4S}{a^2+b^2+c^2};$$

отсюда

$$\mathrm{cotg}\omega=\frac{2bc\cos A+2ca\cos B+2ab\cos C}{4S};$$

но

$$\frac{2bc.\cos A}{4S}=\frac{2bc.\cos A}{2bc.\sin A}=\mathrm{cotg}A,\ldots$$

слѣдовательно,

$\mathrm{cotg}\omega=\mathrm{cotg}A+\mathrm{cotg}B+\mathrm{cotg}C$, что и требовалось доказать (III, 8).

24. Приложенія. Точка Лемуана К треугольника ABC есть центръ тяжести треугольника, вершины котораго суть проэкціи К на стороны AB, BC, CA.

25. Для даннаго треугольника ABC всегда можно построить другой треугольникъ, стороны и медіаны котораго соотвѣтственно параллельны медіанамъ и сторонамъ треугольника ABC.

26. Прямыя, соединяющія средины сторонъ треугольника со срединами соотвѣтственныхъ высотъ его, пересѣкаются въ точкѣ Лемуана.

27. Если H_1, H_2, H_3 суть основанія высотъ треугольника ABC, а X, У, Z—проэкціи точки Лемуана К этого треугольника на его стороны, то точки, симметричныя съ X, У, Z относительно К, суть точки Лемуана треугольниковъ AH_2H_3, BH_3H_1, CH_1H_2.

28. Если К и G суть точка Лемуана и центръ тяжести треугольника ABC, то 1) діаметры круговъ AKB, BKC, CKA обратно пропорціональны медіанамъ треугольника; 2) діаметры круговъ AGB, BGC, CGA обратно пропорціональны отрѣзкамъ AK, BK, CK.

29. Теорема Нейберга (*Neuberg*). Если задано основаніе треугольника и уголъ Брокара, то геометрическое мѣсто вершины его есть окружность.

30. Если задано основаніе треугольника и уголъ Брокара, то геометрическое мѣсто точки Лемуана есть прямая, параллельная основанію треугольника.

Д. Е. (Иваново-Вознесенскъ).

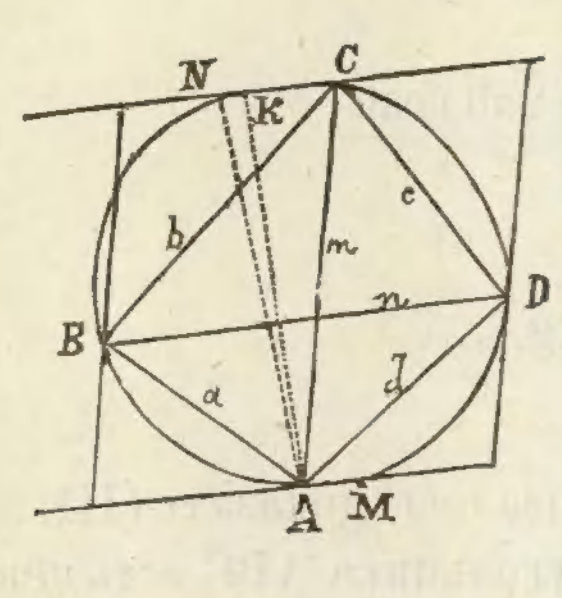
(Продолженіе слѣдуетъ).

МАТЕМАТИЧЕСКІЯ МЕЛОЧИ.

Опредѣленіе площади и отношенія діагоналей вписаннаго въ кругъ четыреугольника.

I. Площадь вписаннаго въ кругъ четыреугольника по даннымъ сторонамъ весьма легко вычисляется слѣдующимъ образомъ.

Пусть стороны четыреугольника $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, а діагонали $AC = m$ и $BD = n$. Проведя черезъ концы діагоналей прямыя, параллельныя діагоналямъ, образуемъ параллелограммъ, площадь котораго вдвое болѣе площади четыреугольника ABCD. Прямыя, проведенныя черезъ A и C параллельно діагонали BD, встрѣчаютъ окружность въ M и N. Обозначивъ AM чрезъ x, CN чрезъ y и прилагая теорему Птоломея къ четыреугольникамъ BDMA и BDCN (на чертежѣ прямыя $BM = d$ и $DM = a$ не проведены), легко найдемъ



Фиг. 45.

$$x = \frac{d^2 - a^2}{n} \text{ и } y = \frac{b^2 - c^2}{n}.$$

Четыреугольникъ AMCN есть равнобочная трапеція, которой діагональ $AC = m$, а параллельныя стороны

$$x = \frac{d^2 - a^2}{n} \text{ и } y = \frac{b^2 - c^2}{n}.$$

Проведя высоту AK этой трапеціи и замѣтивъ, что

$$KC = \frac{x + y}{2} = \frac{d^2 + b^2 - a^2 - c^2}{2n},$$

найдемъ

$$AK = \sqrt{m^2 - \frac{(b^2 + d^2 - a^2 - c^2)^2}{4n^2}} = \frac{\sqrt{4m^2n^2 - (b^2 + d^2 - a^2 - c^2)^2}}{2n}.$$

Такъ какъ $m.n = a.c + b.d$, то

$$AK = \frac{\sqrt{4(ac + bd)^2 - (b^2 + d^2 - a^2 - c^2)^2}}{2n} =$$

$$= \frac{\sqrt{(a - b + c + d)(a + b - c + d)(a + b + c - d)(b + c + d - a)}}{2n}.$$

Площадь параллелограмма равна

$$AK.n = {}^1/_2 \sqrt{(a - b + c + d)(a + b - c + d)(a + b + b - d)(b + c + d - a)}$$

Такъ какъ его площадь вдвое болѣе площади вписаннаго четыреугольника, то площадь вписаннаго четыреугольника равна

$$\tfrac{1}{4}\sqrt{(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)(b+c+d-a)}.$$

II. Зная, что площадь треугольника равна произведенію трехъ его сторонъ, раздѣленному на учетверенный радіусъ описанной окружности, легко найти отношеніе діагоналей вписаннаго четыреугольника.

Имѣемъ

$$\text{пл. ADC} + \text{пл. ABC} = \text{пл. BDC} + \text{пл. BDA}$$

или

$$\frac{dcm}{4R} + \frac{abm}{4R} = \frac{bcn}{4R} + \frac{adn}{4R},$$

откуда

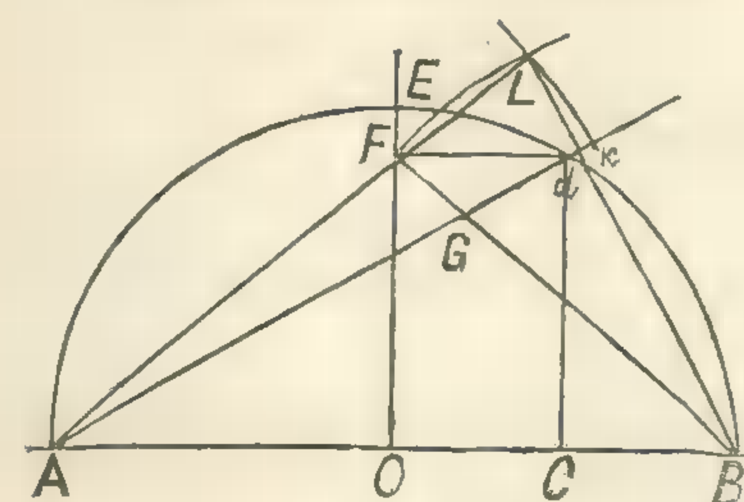
$$\frac{m}{n} = \frac{bc+ad}{dc+ab}.$$

Н. Николаевъ (Пенза).

Построеніе π съ точностью до 0,0001.

Заимствуемъ изъ „Извѣстій Физико-Математическаго Общества при Императ. Казанскомъ Университетѣ" (т. V, № 4) слѣдующій способъ построенія π, принадлежащій г. М. Ефимову.

Изъ средины C радіуса $OB = 1$ возставляемъ перпендикуляръ до пересѣченія съ окружностью въ точкѣ d. Прямая Ad равна очевидно $\sqrt{3}$, а $Cd = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$. Изъ d проводимъ прямую, параллельную діаметру до пересѣченія въ точкѣ F съ радіусомъ OE, проведеннымъ изъ центра O перпендикулярно діаметру AB, и точку F соединяемъ съ B. Очевидно $Fd = \tfrac{1}{4}$ AB и $Gd = \tfrac{1}{5}Ad$. Прямую Gd дѣлимъ на четыре равныя части и отъ точки d на продолженіи Ad откладываемъ $dk = \tfrac{1}{4}Gd = \tfrac{1}{20}Ad$. Изъ точки A описываемъ окружность радіусомъ Ak, а изъ точки B—радіусомъ BF. Пусть эти окружности пересѣкаются въ точкѣ L. Ломанная ALB выражаетъ значеніе π съ точностью до 0,0001.



Фиг. 46.

Дѣйствительно:

$$\overline{BF}^2 = \overline{OF}^2 + \overline{OB}^2 = (\tfrac{1}{2}\sqrt{3})^2 + 1 = \tfrac{7}{4},$$

откуда

$$BL = BF = \frac{\sqrt{7}}{2} = 1{,}322876.$$

$$AL = Ak = Ad + dk = Ad + {}^{1}/_{20}Ad = {}^{21}/_{21}\sqrt{3} = 1,818653.$$

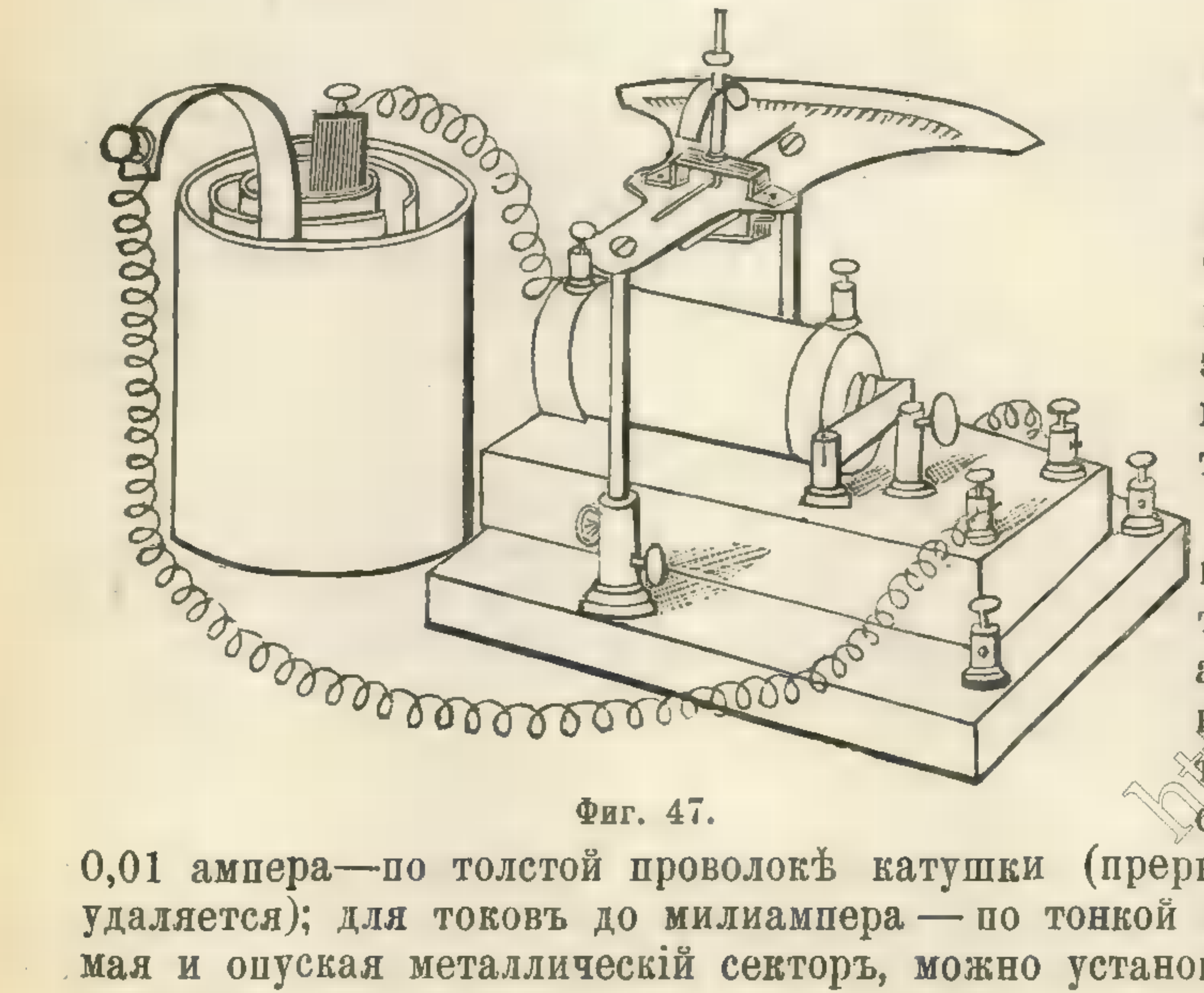
Слѣдовательно

$$ALB = AL + LB = 1,818653 + 1,322876 = \mathbf{3,141529}.$$

ОПЫТЫ и ПРИБОРЫ.

Примѣненіе катушки Румкорфа къ производству электрическихъ измѣреній. („Электрич." 1896, № 8).—Пріобрѣтеніе вольтметра, амперметра и уаттметра для большинства любителей является если не непосильнымъ, то во всякомъ случаѣ обременительнымъ расходомъ. Кромѣ того во многихъ случаяхъ этихъ аппаратовъ можетъ и не оказаться на лицо. Въ виду этого предлагаемый г. *Albert*'омъ *Nodon* очень простой способъ преобразованія обыкновенной катушки Румкорфа въ любой изъ упомянутыхъ приборовъ заслуживаетъ полнаго вниманія.

Какъ видно изъ прилагаемаго рисунка, на деревянномъ пьедесталѣ катушки утверждены двѣ вертикальныя подвижныя металлическія подставки, поддерживающія горизонтальный металлическій секторъ съ произвольными дѣленіями по дугѣ его. Надъ секторомъ помѣщена довольно длинная стрѣлка-указатель изъ алюминія, къ которой прикрѣплены нѣсколько короткихъ намагниченныхъ стрѣлокъ такъ, что ось ихъ системы параллельна стрѣлкѣ-указателю. Кромѣ того система снабжена еще направляющимъ магнитомъ, имѣющимъ форму дуги и помѣщеннымъ на любой высотѣ надъ секторомъ. Середина катушки должна по возможности совпадать съ центромъ системы магнитныхъ стрѣлокъ и стрѣлки-указателя.



Фиг. 47.

Въ такомъ видѣ приборъ можетъ служить:

a) для опредѣленія направленія тока отъ первичныхъ и вторичныхъ элементовъ и динамомашинъ прямого тока;

b) въ качествѣ гальванометра; для токовъ отъ 5 до 40 амперъ токъ пропускается прямо по металлическимъ подставкамъ; отъ 5 до 0,01 ампера—по толстой проволокѣ катушки (прерыватель при этомъ удаляется); для токовъ до милиампера — по тонкой проволокѣ. Поднимая и опуская металлическій секторъ, можно установить его въ самомъ выгодномъ положеніи;

c) въ качествѣ амперметра; для этого сопротивленіе толстой проволоки катушки доводится до 2 омъ введеніемъ нейзильберовой проволоки, черезъ нее пропускается токъ въ 2 ампера отъ свинцоваго аккумулятора и приборъ градуируется. Послѣ этого онъ можетъ служить для точнаго измѣренія токовъ отъ 40 амперъ до 0,01 ампера;

d) въ качествѣ вольтметра; для градуировки черезъ тонкую проволоку пропускается токъ опредѣленнаго напряженія, уголъ отклоненія стрѣлки дѣлится на любое число дѣленій и такая градуировка продолжается на весь секторъ. Тогда приборъ даетъ возможность измѣрять напряженія отъ 0,01 вольта до 500 вольтъ съ значительной точностью;

e) въ качествѣ уаттметра; располагая напряженіемъ въ 2 вольта пропускаютъ токъ одновременно черезъ обѣ проволоки катушки (сопротивленіе толстой проволоки равно по прежнему 2 омамъ). Тогда стрѣлка даетъ отклоненіе, пропорціональное двумъ уаттамъ.

Здѣсь, какъ и ранѣе, величины угловъ отклоненія, если они не велики, можно считать пропорціональными числу измѣряемыхъ уаттовъ.

ИЗОБРѢТЕНІЯ и ОТКРЫТІЯ.

Автоматическая телефонная система. — Въ настоящее время почтово-телеграфнымъ управленіемъ въ Англіи испытывается новая автоматическая телефонная система, изобрѣтенная нашимъ соотечественникомъ, г. Апостоловымъ-Бердичевскимъ. По словамъ изобрѣтателя система его представляетъ слѣдующія преимущества передъ нынѣ дѣйствующими системами:

1) Каждый подписчикъ самъ имѣетъ возможность сообщаться съ каждымъ другимъ подписчикомъ той же сѣти, или съ нѣсколькими подписчиками послѣдовательно, или, наконецъ, говорить нѣсколькимъ одновременно.

2) Каждый подписчикъ самъ можетъ сообщаться съ другой телефонной сѣтью въ другомъ городѣ; число одновременныхъ переговоровъ между городами ограничивается только числомъ проводовъ между ними.

3) Возможность подслушиванія переговоровъ между подписчиками вполнѣ устраняется, такъ какъ съ разговаривающимъ подписчикомъ не можетъ сообщаться никто изъ прочихъ подписчиковъ, пока онъ самъ того не пожелаетъ.

4) Для автоматическаго сообщенія требуется по новой системѣ не болѣе $1/2$ минуты времени, тогда какъ при существующихъ системахъ иногда приходится ожидать до $1/2$ часа, пока телефонистка сдѣлаетъ требуемое соединеніе.

5) Система г. Апостолова примѣняется ко всѣмъ существующимъ телефоннымъ сѣтямъ, причемъ для этого не требуется никакихъ добавочныхъ линій; къ аппарату подписчика прибавляется только небольшая коробка-манипуляторъ, а всѣ громоздкіе приборы на центральной

станціи замѣняются однимъ столомъ, на которомъ располагаются автоматическіе „соединители"; столъ этотъ помѣщается въ небольшой комнатѣ, которая всегда остается закрытой, за исключеніемъ того времени, когда надо установить соединители для новыхъ подписчиковъ. Весь персоналъ станціи сводится къ одному телефонисту.

Если всѣ эти преимущества дѣйствительно оправдаются въ дѣйствительности, то изобрѣтеніе г. Апостолова произведетъ переворотъ въ дѣлѣ телефонныхъ сообщеній и сдѣлаетъ пользованіе телефономъ вполнѣ доступнымъ для людей съ небольшими средствами. Въ настоящее время для центральныхъ телефонныхъ станцій въ большихъ городахъ требуются громадныя помѣщенія и бывали случаи, что приходилось отказывать новымъ подписчикамъ за недостаткомъ мѣста. При новой системѣ расходы на содержаніе станціи не зависятъ отъ числа абонентовъ, т. е. стоимость телефона для каждаго отдѣльнаго подписчика значительно уменьшается при увеличеніи ихъ числа. Манипуляціи, которыя приходится производить подписчику, чтобы соединиться съ другимъ, крайне просты и повидимому не могутъ вести къ ошибкамъ.

Ящикъ-манипуляторъ, которымъ снабжается аппаратъ каждаго абонента, имѣетъ на передней стѣнкѣ три прорѣза (окна) и нѣсколько кнопокъ. Въ двухъ окнахъ появляются при соотвѣтствующихъ манипуляціяхъ номера подписчиковъ (въ лѣвомъ—тысячи и сотни;—въ правомъ—десятки и единицы), а среднее окно указываетъ ходъ всей операціи сообщенія; при бездѣйствіи аппарата въ немъ видна надпись „off" (разобщеніе). Самое соединеніе производится такъ: пусть подписчикъ *A* желаетъ разговаривать съ подписчикомъ *B*, номеръ котораго 2753. Убѣдившись, что аппаратъ разобщенъ, т. е. что въ среднемъ окнѣ стоитъ надпись „off", *A* нажимаетъ кнопку подъ лѣвымъ окномъ, въ которомъ начинаютъ тогда появляться числа по порядку; когда появится требуемое число,—въ нашемъ примѣрѣ 27, — *A* оставляетъ лѣвую кнопку и нажимаетъ правую, пока въ правомъ окнѣ не появится число 53. Тогда линія *A* автоматически соединяется съ *B*. Затѣмъ *A* дотрагивается до кнопки съ надписью „call" (вызовъ), и въ среднемъ окнѣ появляется слово „ring up" (звоните), послѣ чего *A* звонитъ въ свой аппаратъ. Слыша звонокъ, *B* подходитъ къ своему аппарату и видитъ въ немъ слово „call" (вызовъ). Если онъ желаетъ разговаривать, то дотрогивается до кнопки съ надписью „call", послѣ чего въ среднихъ окнахъ обоихъ аппаратовъ появляются слова „are you there" (тамъ ли вы). Тогда *A* и *B* снимаютъ съ коммутаторныхъ крючковъ свои телефоны и начинаютъ разговаривать. По окончаніи разговора *A* и *B* вѣшаютъ свои телефоны на крючекъ коммутатора и дотрагиваются до кнопокъ съ надписью „finish" (конецъ); тогда въ среднихъ окнахъ обоихъ приборовъ появляется слово „off", обозначающее, что всѣ приборы пришли въ первоначальное положеніе. Если въ окнѣ не появляются слова „are you there", то это значитъ, что *B* не слышитъ вызова, не можетъ или не желаетъ разговаривать; тогда *A* долженъ дотронуться до кнопки „finish", чтобы разъединить свой аппаратъ. („Электричество").

B. Г.

РАЗНЫЯ ИЗВѢСТІЯ.

$^3/_{15}$ іюня сего года въ городѣ Глэзго торжественно отпразднованъ пятидесятилѣтній юбилей профессорской дѣятельности лорда Кельвина (Вилліама Томсона). Желая придать этому празднеству по возможности большее значеніе, представители университета и городского управленія организовали изъ своей среды комитетъ, который разослалъ приглашенія прислать къ празднеству своихъ представителей различнымъ университетамъ и ученымъ обществамъ, выдающимся научнымъ и профессіональнымъ дѣятелямъ, а также гражданамъ города Глэзго и другихъ городовъ, имѣющихъ связи съ университетомъ въ Глэзго. Кромѣ того къ юбилею была устроена выставка механическихъ, электрическихъ и другихъ приборовъ, иллюстрирующихъ изобрѣтательность геніальнаго физика.

Извѣстнымъ французскимъ ученымъ Муро и профессорами Лейстомъ и Пильчиковымъ въ настоящее время производятся изслѣдованія магнитной аномаліи между Харьковомъ и Курскомъ. Г. Муро занимается абсолютными наблюденіями въ уѣздахъ, проф. Лейстъ производитъ варіаціонныя измѣренія въ Москвѣ, а проф. Пильчиковъ—въ Харьковѣ.

Въ Лондонскомъ почтамтѣ введено фотографированіе всѣхъ подозрительныхъ писемъ и посылокъ по способу проф. Рёнтгена.

Въ прошломъ году въ Австраліи былъ произведенъ опытъ телеграфированія на большое разстояніе, увѣнчавшійся полнымъ успѣхомъ. Для опыта были соединены всѣ набережныя линіи Австраліи, что дало 11650 километровъ. Конечными станціями были Дерби и Капъ-Іоркъ. Скорость передачи (при помощи аппарата Морзе) равнялась одиннадцати словамъ въ минуту. („Электр.").

Проэктируется устроить прямое телефонное сообщеніе между Берлиномъ и Лондономъ.

ЗАДАЧИ.

№ 337. Показать, что во всякомъ треугольникѣ

$$a(\cos C+\cos B)+b(\cos C+\cos A)+c(\cos B+\cos A)=\frac{abc}{2Rr},$$

$$a(\cos C-\cos B)+b(\cos A-\cos C)+c(\cos B-\cos A)=\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{2Rr},$$

гдѣ a, b, c суть стороны треугольника, R—радіусъ описаннаго, а r—вписаннаго круга.

Д. Е. (Иваново-Вознесенскъ).

№ 338. Изъ точки O внѣ плоскости проведены наклонныя $OA=a$ и $OB=b$. Уголъ между наклонной OB и плоскостью втрое больше угла между наклонной OA и плоскостью. Опредѣлить безъ помощи тригонометріи разстояніе точки O отъ плоскости.

Н. Николаевъ (Пенза).

№ 339. Изъ вершинъ четыреугольника $ABCD$ опущены перпендикуляры AA', BB', CC', DD' на его діагонали. Показать, что четыреугольникъ $A'B'C'D'$ подобенъ четыреугольнику $ABCD$.

С. Петрашкевичъ (Скопинъ).

№ 340. Опредѣлить число сторонъ многоугольника, если извѣстно, что число діагоналей, проведенныхъ изъ одной его вершины, относится къ числу всѣхъ различныхъ діагоналей этого многоугольника, какъ $1:a$.

И. Хіенкинъ (Тамбовъ).

№ 341. Показать, что если раздѣлимъ гипотенузу прямоугольнаго треугольника на три равныя части и соединимъ точки дѣленія съ вершиной прямого угла, то сумма квадратовъ двухъ терціанъ *), сложенная съ квадратомъ трети гипотенузы, равна двумъ третямъ квадрата гипотенузы.

Я. Полушкинъ (с. Знаменка).

№ 342. Въ данный шаръ радіуса r помѣстить пять правильныхъ четырегранниковъ такъ, чтобы одинъ изъ нихъ имѣлъ центръ общій съ центромъ даннаго шара, а каждый изъ остальныхъ имѣлъ одну сторону общую съ первымъ и одну вершину на поверхности даннаго шара.

П. Свѣшниковъ (Уральскъ).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 485 (2 сер.). Показать, что двугранный уголъ правильнаго октаэдра и двугранный уголъ правильнаго тетраэдра составляютъ вмѣстѣ два прямыхъ двугранныхъ угла.

Пусть O есть центръ правильнаго октаэдра, ABC—одна изъ его граней, M = средина ребра $AC = a$. Изъ треугольника BMO имѣемъ

$$\cos BMO = \frac{MO}{BM} = \frac{{}^1/_2 a}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

линейный уголъ двуграннаго угла октаэдра вдвое больше угла BMO. Называя его черезъ α, получимъ:

$$\cos\alpha = 2\cos^2 BMO - 1 = -{}^1/_3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

*) Терціанами называются прямыя, соединяющія вершину треугольника съ точками, въ которыхъ противоположная сторона дѣлится на три равныя части.

Опустимъ изъ вершины S правильнаго тетраэдра $SPQR$ перпендикуляръ SO_1 на грань PQR. Пусть M_1 есть середина ребра PQ, а b—ребро тетраэдра. Изъ треугольника SM_1O_1 имѣемъ:

$$\cos SM_1O_1 = \frac{M_1O_1}{SM_1} = \frac{\frac{b}{2\sqrt{3}}}{\frac{b\sqrt{3}}{2}} = {}^1/_3. \quad . \quad . \quad (2)$$

Изъ равенствъ (1) и (2) легко видѣть, что $\alpha + \angle SM_1O_1 = 180^0$.

П. Ивановъ (Одесса); *С. Бабанская* (Тифлисъ); *К. Щиголевъ* (Курскъ); *Я. Полушкинъ* (с. Знаменка); *А. Рѣзновъ* (Спб.).

№ 499 (2 сер.). Данъ гармоническій четыреугольникъ $ABCD$, котораго діагональ $AC = 2\sqrt{AB.BC}$. Показать, что прямыя AD, BD и CD составляютъ геометрическую прогрессію и опредѣлить знаменателя этой прогрессіи.

Если четыреугольникъ гармоническій, то $AB.CD = AD.BC$, откуда

$$CD = AD.\frac{BC}{AB}.$$

По теоремѣ Птоломея $AC.BD = 2AD.BC$, откуда

$$BD = \frac{2AD.BC}{AC} = \frac{2.AD.BC}{2\sqrt{AB.BC}} = AD\sqrt{\frac{BC}{AB}}.$$

Слѣдовательно знаменатель прогрессіи равенъ $\sqrt{\frac{BC}{AB}}$.

Г. Легошинъ (с. Знаменка); *Л. Заржецкій* (Обольцы); *П. Ивановъ* (Одесса); *К. Щиголевъ* (Курскъ).

№ 200 (3 сер.). Черезъ каждое ребро куба проведена плоскость, одинаково наклоненная къ сторонамъ соотвѣтствующаго двуграннаго угла и не пересѣкающая куба. Показать, что всѣ эти плоскости образуютъ своимъ взаимнымъ пересѣченіемъ ромбическій додекаэдръ.

Если возьмемъ одинъ изъ квадратовъ, ограничивающихъ кубъ, и проведемъ черезъ стороны его плоскости, наклоненныя, согласно условію задачи, подъ угломъ въ 45^0 къ его плоскости, то легко убѣдимся, что получится пирамида съ квадратнымъ основаніемъ и съ боковой поверхностью, состоящей изъ равныхъ равнобедренныхъ треугольниковъ; къ основанію каждаго изъ этихъ треугольниковъ въ той же плоскости приложенъ другой такой же треугольникъ, такъ что образуется ромбъ и сторона квадрата служитъ короткой его діагональю. Такихъ ромбовъ получится очевидно 12 и они составятъ ромбическій додекаэдръ, ибо, что не трудно доказать, плоскость, проведенная черезъ высоты двухъ противоположныхъ равнобедренныхъ треугольниковъ въ любой изъ пи-

рамидъ съ квадратнымъ основанiемъ, пересѣкаетъ поверхность образовавшагося многогранника по четыремъ прямымъ, составляющимъ квадратъ.

А. Варенцовъ (Шуя); *ученики Кiево-Печерской гимназiи Л. и Р.*

№ 201 (3 сер.). Черезъ каждое ребро правильнаго октаэдра проведена плоскость, одинаково наклоненная къ сторонамъ соотвѣтствующаго двуграннаго угла и не пересѣкающая октаэдра. Показать, что всѣ эти плоскости образуютъ взаимнымъ пересѣченiемъ ромбическiй додекаэдръ.

Проведя главное квадратное сѣченiе ромбическаго додекаэдра, соединимъ вершины квадрата съ концами той изъ главныхъ осей ромбическаго додекаэдра, которая перпендикулярна къ проведенному сѣченiю. Получимъ, очевидно, правильный октаэдръ, причемъ плоскости всѣхъ ромбовъ додекаэдра одинаково наклонены къ сторонамъ октаэдра. Отсюда ясно и обратное построенiе.

А. Варенцовъ (Шуя); *ученики Кеiво-Печерской гимназiи Л. и Р.*

№ 258 (3 сер.). Даны стороны вписаннаго въ кругъ четыреугольника $ABCD$ ($AB=a$, $BC=b$, $CD=c$ и $DA=d$). Чтобы вычислить дiаметръ описанной окружности, поступаемъ такъ: черезъ D проводимъ дiаметръ DN и, опредѣливъ $AN=\sqrt{x^2-d^2}$ и $NC=\sqrt{x^2-c^2}$, найдемъ по теоремѣ Птоломея:

$$AC=\frac{c\sqrt{x^2-d^2}+d\sqrt{x^2-c^2}}{x},$$

гдѣ x есть искомый дiаметръ. Точно такъ же, проведя дiаметръ BM и опредѣливъ $AM=\sqrt{x^2-a^2}$ и $CM=\sqrt{x^2-b^2}$, найдемъ

$$AC=\frac{b\sqrt{x^2-a^2}+a\sqrt{x^2-b^2}}{x}.$$

Такимъ образомъ имѣемъ уравненiе:

$$b\sqrt{x^2-a^2}+a\sqrt{x^2-b^2}=c\sqrt{x^2-d^2}+d\sqrt{x^2-c^2}.$$

Рѣшить это уравненiе.

Возвысивъ обѣ части даннаго уравненiя въ квадратъ, найдемъ:

$$(a^2+b^2-c^2-d^2)x^2-2a^2b^2+2c^2d^2+2ab\sqrt{(x^2-a^2)(x^2-b^2)}=$$
$$=2cd\sqrt{(x^2-c^2)(x^2-d^2)}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Если проведемъ дiаметры AP и CQ, то составимъ уравненiе:

$$a\sqrt{x^2-d^2}-b\sqrt{x^2-c^2}=c\sqrt{x^2-b^2}-d\sqrt{x^2-a^2},$$

которое по возвышенiи въ квадратъ даетъ:

$$(a^2+b^2-c^2-d^2)x^2+2cd\sqrt{(x^2-a^2)(x^2-b^2)}=2ab\sqrt{(x^2-c^2)(x^2-d^2)} \quad . \quad . \quad (2)$$

Изъ этого уравненія опредѣляемъ

$$2\sqrt{(x^2-c^2)(x^2-d^2)}=\frac{(a^2+b^2-c^2-d^2)x^2+2cd\sqrt{(x^2-a^2)(x^2-b^2)}}{ab}$$

и полученное выраженіе вставляемъ въ уравненіе (1); по упрощеніи получимъ:

$$(a^2+b^2-c^2-d^2)x^2-2ab(ab+cd)=-2(ab+cd)\sqrt{(x^2-a^2)(x^2-b^2)}.$$

Возвысивъ это уравненіе въ квадратъ, получимъ:

$$(a^2+b^2-c^2-d^2)^2x^4-4ab(ab+cd)(a^2+b^2-c^2-d^2)x^2+4a^2b^2(ab+cd)^2-$$
$$-4(ab+cd)^2(x^2-a^2)(x^2-b^2)=0,$$

или

$$(a+b+c-d)(a+b-c+d)(a-b+c+d)(a-b-c-d)x^2=$$
$$=-4(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc),$$

откуда

$$x=2\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}{(a+b+c-d)(a+b-c+d)(a-b+c+d)(b+c+d-a)}}.$$

М. Зиминъ (Орелъ); *ученики Кіево-Печерской гимназіи Л. и Р.*

NB. Обыкновенно діаметръ окружности, описанной около четыреугольника, находятъ тригонометрическимъ путемъ, пользуясь выраженіемъ площади четыреугольника въ функціи его сторонъ.

№ 259 (3 сер.). Число N дѣлится на 18 и имѣетъ нечетныя цифры, число которыхъ равно суммѣ цифръ числа N, дѣленной на 9. Показать, что числа N и $N:2$ имѣютъ одинаковую сумму цифръ.

Обозначимъ сумму цифръ числа N черезъ S, сумму четныхъ его цифръ—черезъ s_1, сумму нечетныхъ — черезъ s_2, и число нечетныхъ цифръ—черезъ n. При дѣленіи числа N на 2 вмѣсто каждой четной цифры получится ея половина, каждая же нечетная цифра α дастъ при дѣленіи на два $(\alpha-1):2$ единицъ того же разряда и 5 единицъ нисшаго разряда. Поэтому n нечетныхъ цифръ числа N дадутъ въ суммѣ цифръ числа $N:2$

$$\frac{s_2-n}{2}+5n=\frac{s_2+9n}{2}$$

единицъ, а вся сумма цифръ числа $N:2$ будетъ

$$\frac{s_1}{2}+\frac{s_2+9n}{2}=\frac{S+9n}{2};$$

но такъ какъ по условію $9n=S$, то сумма цифръ числа $N:2$ будетъ $(S+S):2=S$.

Ученики Кіево-Печерской гимназіи Л. и Р.; *С. Петрашкевичъ* (Скопинъ).

№ 260 (3 сер.). Внутри треугольника ABC дана точка M. Построены параллелограммы $AMBM_1$, $BMCM_2$ и $CMAM_3$. Доказать, что прямыя AM_2, BM_3 и CM_1 пересѣкаются въ одной точкѣ.

Такъ какъ отрѣзокъ AM_3 равенъ и параллеленъ отрѣзку MC, а отрѣзокъ MC равенъ и параллеленъ отрѣзку BM_2, то фигура ABM_2M_3 есть параллелограммъ и его діагонали AM_2 и BM_3 взаимно дѣлятся пополамъ въ точкѣ K. Такъ какъ отрѣзокъ BM_1 равенъ и параллеленъ отрѣзку AM, а отрѣзокъ AM равенъ и параллеленъ отрѣзку CM_3, то фигура BCM_3M_1 есть также параллелограммъ и діагональ его CM_1 проходитъ черезъ середину K діагонали BM_3.

Очевидно, что теорема остается справедливой для всякой точки въ плоскости треугольника ABC.

Ученики Кіево-Печерской гимназіи Л. и Р.; *Э. Заторскій* (Вильно); *Г. Легошинъ* (с. Знаменка); *L.* (Тамбовъ).

№ 265 (3 сер.). Опредѣлить внутренніе углы ромбовъ, ограничивающихъ ромбическій додекаэдръ, и сравнить ихъ съ линейными углами двугранныхъ угловъ правильнаго тетраэдра и правильнаго октаэдра.

Обозначимъ короткую діагональ AC одного изъ ромбовъ $ABCD$, ограничивающихъ ромбическій додекаэдръ, черезъ a. Пусть M есть точка пересѣченія діагоналей AC и BD. Имѣемъ:

$$BM = \frac{a\sqrt{2}}{2}, \quad AB = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Пусть α есть тупой уголъ ромба, β — острый. Изъ треугольника ABM найдемъ:

$$\cos {}^{\alpha}/_{2} = \frac{AM}{AB} = \frac{1}{\sqrt{3}}; \cos {}^{\beta}/_{2} = \frac{BM}{AB} = \sqrt{{}^{2}/_{3}},$$

откуда

$$\cos\alpha = -\,{}^{1}/_{3}; \quad \alpha = 109^{\circ}28'13,(3)''$$

$$\cos\beta = \quad {}^{1}/_{3}; \quad \beta = \quad 70^{\circ}31'46,(6)''.$$

Такимъ образомъ (см. рѣш. зад. 485-ой 2-ой сер.) тупой уголъ ромба, ограничивающаго ромбическій додекаэдръ, равенъ линейному углу правильнаго октаэдра, а острый—правильнаго тетраэдра.

Ученики Кіево-Печерской гимназіи Л. и Р.; *Я. Полушкинъ* (Знаменка).

№ 266 (3 сер.). Имѣетъ ли цѣлыя рѣшенія неопредѣленное уравненіе

$$y(10x^2 + 21y^5 - 30z^3) = 578?$$

Представивъ данное уравненіе въ видѣ:

$$10x^2 + 21y^5 - 30z^3 = \frac{578}{y} = \frac{2.289}{y},$$

легко видѣть, что при y четномъ правая часть уравненія нечетна, а

лѣвая четна, чего, очевидно, не можетъ быть; при y же нечетномъ правая часть уравненія должна быть четной, а лѣвая нечетной, чего также не можетъ быть.

С. Петрашкевичъ (Скопинъ); *Э. Заторскій* (Вильно); *ученики Кіево-Печерской гимназіи Л. и Р.*; *Ю. Идельсонъ* (Одесса).

№ 272 (3 сер.). Треугольникъ $A'B'C'$ вписанъ въ треугольникъ ABC такъ, что вершина A' лежитъ на сторонѣ BC, B'—на AC и C'—на AB. Обозначимъ стороны треугольника ABC черезъ a, b, c, а отрѣзки AB', CB' и AC' соотвѣтственно черезъ x, y, z. Показать, что отношеніе площади треугольника $A'B'C'$ къ площади ABC равно

$$\frac{xyz+(a-x)(b-y)(c-z)}{abc}.$$

Такъ какъ площади треугольниковъ, имѣющихъ общій уголъ, относятся какъ произведенія сторонъ, заключающихъ этотъ уголъ, то

$$\frac{\text{пл. } A'BC'}{\text{пл. } ABC}=\frac{x(c-z)}{ac},\quad \text{пл. } A'BC'=\text{пл. } ABC\frac{x(c-z)}{ac};$$

$$\frac{\text{пл. } A'B'C}{\text{пл. } ABC}=\frac{y(a-x)}{ab},\quad \text{пл. } A'B'C=\text{пл. } ABC\frac{y(a-x)}{ab};$$

$$\frac{\text{пл. } AB'C'}{\text{пл. } ABC}=\frac{z(b-y)}{bc};\quad \text{пл. } AB'C'=\text{пл. } ABC\frac{z(b-y)}{bc}.$$

Если вычтемъ сумму площадей $A'BC'$, $A'B'C$ и $AB'C'$ изъ площади ABC, то получимъ площадь $A'B'C'$. Поэтому

$$\frac{\text{пл. } A'B'C'}{\text{пл. } ABC}=1-\frac{x(c-z)}{ac}-\frac{y(a-x)}{ab}-\frac{z(b-y)}{bc}=$$

$$\frac{xyz+(a-x)(b-y)(c-z)}{abc}.$$

М. Зиминъ (Орелъ); *Э. Заторскій* (Вильно); *ученики Кіево-Печерской гимназіи Л. и Р.*; *В. Сахаревъ* (Тамбовъ).

№ 273 (3 сер.). Опредѣлить x изъ уравненія:

$$\frac{(x+a+b)^5+(x+c+d)^5}{(x+a+c)^5+(x+b+d)^5}=\frac{m}{n}.$$

Пусть

$$\frac{2x+a+b+c+d}{2}=y,\ \frac{a+b-c-d}{2}=p,\ \frac{a+c-b-d}{2}=q.$$

Тогда данное уравненіе представится въ такомъ видѣ:

$$\frac{(y+p)^5+(y-p)^5}{(y+q)^5+(y-q)^5}=\frac{m}{n}.$$

Сокративъ это уравненіе на $2y$, что даетъ

$$x = -\frac{a+b+c+d}{2},$$

получимъ:

$$\frac{(y+p)^4-(y+p)^3(y-p)+(y+p)^2(y-p)^2-(y+p)(y-p)^3+(y-p)^4}{(y+q)^4-(y+q)^3(y-q)+(y+q)^2(y-q)^2-(y+q)(y-q)^3+(y-q)^4}=\frac{m}{n}.$$

Разложивъ всѣ двучлены по формулѣ бинома и произведя упрощенія, получимъ биквадратное относительно y уравненіе

$$y^4(m-n)+10(mq^2-np^2)+5(mq^4-np^4)=0,$$

которое дастъ 4 значенія для y, а слѣдовательно и для x.

Э. Заторскій (Вильно); *М. Зиминъ* (Орелъ).

№ 275 (3 сер.). Пусть μ обозначаетъ отношеніе площадей правильныхъ одноименныхъ многоугольниковъ, изъ которыхъ одинъ вписанъ въ кругъ, а другой описанъ около того же круга; пусть μ' обозначаетъ отношеніе площадей вписаннаго и описаннаго правильныхъ многоугольниковъ съ удвоеннымъ числомъ сторонъ. Показать, что

$$\mu'=\frac{1+\sqrt{\mu}}{2}.$$

1. Изъ равенства

$$a_{2n}^2=2r^2-2r\sqrt{r^2-\frac{a_n^2}{4}},$$

выражающаго зависимость между стороной a_{2n} многоугольника о $2n$ сторонахъ, стороной a_n многоугольника о n сторонахъ и радіусомъ r круга, въ который оба эти многоугольника вписаны, получаемъ:

$$\frac{r^2}{2}+\frac{r}{2}\sqrt{r^2-\frac{a_n^2}{4}}=r^2-\frac{a_{2n}^2}{4},$$

или

$$\frac{1+\frac{\sqrt{r^2-\frac{a_n^2}{4}}}{r}}{2}=\frac{r^2-\frac{a_{2n}^2}{4}}{r^2}\quad\ldots\ldots(a)$$

Отношеніе площадей правильныхъ одноименныхъ многоугольниковъ, изъ которыхъ одинъ вписанъ въ кругъ, а другой описанъ около того же круга, равно отношенію квадрата апоѳемы вписаннаго многоугольника къ квадрату радіуса круга. Слѣдовательно

$$\mu'=\frac{r^2-\frac{a_{2n}^2}{4}}{r^2},\quad \sqrt{\mu}=\frac{\sqrt{r^2-\frac{a_n^2}{4}}}{r}.$$

Подставляя μ' и $\sqrt{\mu}$ въ равенство (α) получимъ требуемое соотношеніе.

М. Зиминъ (Орелъ); *К...овъ* (Пенза); *П. Бѣловъ* (с. Знаменка).

2. Такъ какъ апоѳема вписаннаго въ кругъ радіуса r многоугольника объ n сторонахъ равна $r\cos\alpha$, гдѣ $\alpha = 180^0 : n$, то

$$\mu = \cos^2\alpha,\ \mu' = \cos^2\alpha/_2.$$

Возвышая въ квадратъ выраженіе

$$\cos{}^{\alpha}/_2 = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}},$$

получимъ

$$\cos^2{}^{\alpha}/_2 = \frac{1+\cos\alpha}{2},\ \text{или}\ \mu' = \frac{1+\sqrt{\mu}}{2}.$$

Ученики Кіево-Печерской гимназіи Л. и Р.; *Э. Заторскій* (Вильно); *В. Сахаровъ* (Тамбовъ).

№ 276 (3 сер.). Найти геометрическое мѣсто ортоцентровъ треугольниковъ, имѣющихъ постоянные сторону и уголъ, противолежащій этой сторонѣ.

Легко показать, что сторона a видна изъ ортоцентра подъ угломъ $180^0 - A$. Слѣдовательно при постоянныхъ a и A искомымъ геометрическимъ мѣстомъ будетъ дуга, описанная на сторонѣ a и вмѣщающая уголъ $180^0 - A$.

Ученики Кіево-Печерской гимназіи Л. и Р.; *Э. Заторскій* (Вильно); *Г. Леготинъ* (с. Знаменка); *С. Циклинскій* (Пинскъ).

№ 277 (3 сер.). Показать, что если

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{4}{a},$$

то

$$(a+b-c)^3 + 2(b+c-a)^3 + (c+a-b)^3 = 2(b+c)^3.$$

Изъ равенства

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{4}{a}$$

имѣемъ

$$6a^2c + 6a^2b - 24abc = 0.$$

Сложивъ это равенство съ тожествомъ:

$$2a^3+b^3+c^3+3a^2b+3a^2c+6ab^2+6ac^2+3bc^2+3b^2c-2a^3-b^3-c^3-$$

$$-3a^2b-3a^2c-6ab^2-6ac^2-3bc^2-3b^2c+2b^3+2c^3+6b^2c+6bc^2=2(b+c)^3,$$

легко представимъ полученную сумму въ требуемомъ видѣ,

М. Зиминъ (Орелъ); принцъ *Хосро-Мирза, Винтеръ* (Симбирскъ); *ученики Кіево-Печерской гимназіи Л. и Р.*; *С. Циклинскій* (Пинскъ); *Э. Заторскій* (Вильно); *П. Бѣловъ* (с. Знаменка).

ПОЛУЧЕНЫ РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ отъ слѣдующихъ лицъ: *К. Чапковскаго* (Троицкъ) 227 (3 сер.); *Ю. Идельсона* (Одесса) 266, 299, 300, 302, 307 (3 сер.); *М. Зимина* (Елецъ) 273, 274, 278, 279, 280, 281, 282, 283, 284, 285, 286, 287, 288, 289, 291, 292, 296, 297, 298, 299, 300, 301, 302, 304, 305, 306, 307, 309, 310, 312, 313, 323 (3 сер.); *А. Ярцева* (Тамбовъ) 307 (3 сер.); *Э. Заторскаго* (Вильно) 69, 281, 287, 292, 295, 296, 297, 298, 299, 300, 301, 302, 306, 307, 309, 312, 315, 316, 319, 322 (3 сер.); *С. Петрашкевича* (ст. Никитино) 249, 259, 266, 269, 278, 279, 296, 297 (3 сер.); *Лежебока и Б.* (Ярославль) 297, 301, 302, 306, 307, 312 (3 сер.); *Лежебока* (Ярославль) 226, 227, 245, 247, 256, 257, 262, 291, 292, 296, 298, 299 (3 сер.); *учениковъ Тамбовской гимназіи С. Н—ва и И. Х—на* 288, 295, 2 6, 300, 302 (3 сер.); *С. Ц.* (Пинскъ) 295, 296 (3 сер.); принца *Хосро-Мирза* и *Винтера* (Симбирскъ) 237, 277 (3 сер.); *Свищова* (Спб.) 281, 284, 286, 288, 292 (3 сер.); *С. Циклинскаго* (Пинскъ) 194, 230, 243, 276, 281, 288, 296 (3 сер.); *Я. Полушкина* (с. Знаменка) 64, 68 (2 сер.), 297, 300, 302, 303, 305, 308, 309, 312, 313, 314, 316, 319, 320, 322, 323 (3 сер.); *П. Бѣлова* (с. Знаменка) 479 (1 сер.), 296, 306 (3 сер.); *Г. Легошина* (с. Знаменка) 301 (3 сер.); *Д. Цельмера* (Тамбовъ) 257, 296, 298, 299, 300 (3 сер.); *С. Зайцева* (Курскъ) 296, 297, 298, 299, 300, 301 (3 сер.).

ПРОПУЩЕНА въ спискахъ рѣшившихъ задачи 221 и 255 (3 сер.) фамилія *П. Хлѣбникова* (Тула).

ОБЗОРЪ НАУЧНЫХЪ ЖУРНАЛОВЪ.

MATHESIS.

1895.—№ 8 и 9.

Sur les valeurs principales des radicaux. Par M. *De Tilly.* Авторъ замѣчаетъ, что французскіе учебники по алгебрѣ отличаются крайне сжатымъ и потому неяснымъ изложеніемъ статьи, гдѣ трактуется о знакахъ + и — передъ радикалами въ формулахъ преобразованія ирраціональныхъ выраженій *). Чтобы пополнить этотъ пробѣлъ, онъ подробно разсматриваетъ преобразованіе выраженія $\sqrt{a+b\sqrt{-1}}$. Результаты анализа выражены имъ слѣдующими равенствами:

$$\sqrt{a \pm b\sqrt{-1}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} \pm \sqrt{-1}\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}},$$

$$\sqrt{a \pm b\sqrt{-1}} = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} \pm \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}},$$

$$\sqrt{a + b\sqrt{-1}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} + \sqrt{-1}\,\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}},$$

$$\sqrt{\pm a - b\sqrt{-a}} = \pm\sqrt{\frac{\pm a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} - \sqrt{-1}\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}\mp a}{2}};$$

---

*) То же можно замѣтить и относительно русскихъ учебниковъ.

во всѣхъ этихъ равенствахъ $b > 0$; $a > 0$ въ послѣднемъ; въ первыхъ же трехъ можетъ быть $>$ и $<$ о.

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$$

при $a > 0$ и всякомъ $a^2 - b$, или при $a < 0$ и $a^2 - b < 0$

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \mp \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} + \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$$

при $a < 0$ и $a^2 - b > 0$.

Sur les courbes algébriques. Par *M. Gob.* Пусть C и C′ суть двѣ плоскія алгебраическія кривыя n-го порядка съ общими ассимптотами. Предположимъ, что нѣкоторая прямая пересѣкаетъ эти кривыя соотвѣтственно въ точкахъ $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и $B_1, B_2, \ldots, B_n$; тогда

$$\sum_1^n MA_i = \sum_1^n MB_i,$$

гдѣ M—произвольная точка сѣкущей.

Примемъ точку M за полюсъ и нѣкоторую прямую MX за ось полярныхъ координатъ. Положивъ $\angle XMA_i = \vartheta$ и обозначивъ черезъ MP_i и MQ_i полярныя сунормали кривыхъ въ точкахъ A_i и B_i, получимъ

$$\frac{dMA_i}{d\vartheta} = MP_i \text{ и } \frac{dMB_i}{d\vartheta} = Q_i,$$

или, на основаніи предыдущаго равенства:

$$\sum_1^n MP_i = \sum_1^n MQ_i.$$

Предположимъ теперь, что прямая MP_i нормальна къ C въ точкѣ A, и перемѣстимъ сѣкущую параллельно самой себѣ въ положеніе касательной къ C въ точкѣ A; тогда точки M, A_{n-1} и A_n совпадутъ съ A, а точки P_{n-1} и P_n совпадутъ съ центромъ кривизны ω кривой C въ точкѣ A; въ этомъ предположеніи послѣднее равенство приметъ видъ

$$2A\omega + \sum_1^{n-2} AP_i = \sum_1^n AQ_i.$$

Если всѣ ассимптоты дѣйствительны, то вмѣсто кривой C′ удобно принять систему этихъ ассимптотъ. Такимъ путемъ получается теорема:

Если касательная къ гиперболѣ въ точкѣ A *пересѣкаетъ ассимптоты ея въ* B_1 *и* B_2 *и если* Q_1 *и* Q_2 *суть точки пересѣченія нормали къ гиперболѣ въ* A *съ перпендикулярами къ ассимптотамъ въ* B_1 *и* B_2, *то центръ кривизны гиперболы въ точкѣ* A *есть средина отрѣзка* Q_1Q_2.

Если C есть эллипсъ, то C′ есть также эллипсъ, гомотетичный съ C; выберемъ эллипсъ C′ такъ, чтобы пересѣченія его B_1 и B_2 съ касательной въ A къ эллипсу C были концами двухъ сопряженныхъ діаметровъ C′. Въ этомъ случаѣ изъ послѣдняго равенства получается теорема:

Пусть AB_1 *и* AB_2 *суть два отрѣзка на касательной въ* A *къ эллипсу, равные полу-діаметру его сопряженному съ* OA. *Если* Q_1 *и* Q_2 *суть пересѣченія перпендикуляровъ изъ* B_1 *и* B_2 *на* OB_2 *и* OB_1 *съ нормалью къ эллипсу въ точкѣ* A, *то центръ кривизны эллипса въ* A *есть средина отрѣзка* Q_1Q_2.

Mathématiques et mathématiciens. *La droite, le plan, l'espace d'aprés Cauchy.*

Sur un cas remarquable des transformations centrales Par M. *G. de Longchamps.* Пусть (u, ω), (U, Ω) суть полярныя координаты точекъ m и M, связанныя равенствами:

$$\omega = \Omega,\ f(u, U) = 0,$$

гдѣ f есть симметрическая ф-ція u и U. *Laisant* показалъ. что при такомъ преобразованіи координатъ всегда можно найти сотношеніе вида

$$g(u)du + G(U)dU = 0,$$

на основаніи котораго можно построить касательную къ кривой (M), когда извѣстно положеніе касательной къ (m) въ сотвѣтственной точкѣ. *De Longchamps* замѣчаетъ, что существуетъ другой видъ, центральнаго преобразованія, имѣющій то же свойство.

Пусть формулы преобразованія суть

$$\Omega = \omega, \ U = t.u,$$

гдѣ t произвольная ф-ція ω. Изъ этихъ формулъ и ихъ дифференціаловъ

$$d\Omega = d\omega, \ dU = t.du + udt$$

получается равенство:

$$\frac{\frac{dU}{d\Omega}}{U} = \frac{\frac{du}{d\omega}}{u} + \frac{1}{t}.\frac{dt}{d\omega},$$

или

$$\operatorname{cotg} V = \operatorname{cotg} v + \frac{t'}{t},$$

гдѣ V и v суть углы, составляемые векторомъ OMm съ кривыми (M) и (m); изъ этого равенства находится V по данному v.

Обозначимъ черезъ A пересѣченіе касательныхъ къ кривымъ (M) и (m) въ соотвѣтственныхъ точкахъ M и m; черезъ H—проэкцію A на векторъ OMm, тогда (фиг. 48): MH = AHcotgV, mH = AH.cotg$v$ и послѣднее равенство принимаетъ видъ

$$Mm = AH.\frac{t'}{t}; \qquad (1)$$

на основаніи этого равенства легко опредѣлить AH и построить прямую, параллельную вектору OMm, на которой пересѣкаются соотвѣтственнныя касательныя.

Фиг. 48.

Примѣръ. Пусть K есть проэкція на ось OX точки m, M — проэкція точки K на Om (фиг. 49). При такомъ преобразованіи m въ M формулы преобразованія суть

$$\Omega = \omega, \ U = u.\cos^2\omega.$$

Такъ какъ въ этомъ случаѣ $\frac{t'}{t} = -2\operatorname{tg}\omega$,

то (1)

$$AH = \frac{1}{2} MK.$$

Слѣдовательно: *Соотвѣтственныя касательныя въ* m *и* M *пересѣкаются на прямой, параллельной вектору точки* m *и проходящей черезъ средину ординаты* mK *этой точки.*

Фиг. 49.

Sur une transformation centrale. Par *M. L. Meurice.* Пусть OX есть ось полярныхъ координатъ; P — проэкція точки M на OX, m — проэкція P на OM. Координаты (U,ω) и (u, ω) соотвѣтственныхъ точекъ M и m при такомъ построеніи преобразуются по формуламъ

$$\omega = \Omega, \ u = U\cos^2\omega.$$

Meurice, на основаніи кинематическихъ соображеній, показываетъ, какъ при такомъ преобразованіи строится нормаль къ кривой (m), когда извѣстно положеніе соотвѣтственной нормали къ кривой (M).

Revue bibliographique. Essai sur le postulat d'Euclide. Par *M. Crevet.*

Traité d'algèbre. Compléments. Par *M. Laurent.* Paris 1894.

Exercices de Calcul differentiel. Par *M. L. Collette.* Liége. 1894.

Cours de Mécanique. Par *M. X. Antomari.* Paris 1895.

Deux mille quatre cent nouvelles questions mathématiques. Par *M. E. Verhelst.* Bruxelles. 1895.

Notes extraites de la correspondance mathématique et physique.

3. *Problème sur la splere.* Опредѣлить наибольшее число равныхъ шаровъ, касающихся одновременно даннаго шара того же радіуса. *Ch. Tandel* рѣшаетъ эту задачу такъ. Данный шаръ окружается шестью соприкасающимися между собой шарами того же радіуса; центры всѣхъ этихъ семи шаровъ находятся въ одной плоскости. По ту и по другую сторону этой плоскости помѣщается еще по три такихъ же шара, касающихся даннаго.

4. *Theorème sur des parallelogrammes.* Пусть CADE и CBFG суть два параллелограмма въ одной плоскости; обозначимъ черезъ I и K пересѣченія AD съ BF и DE съ FG. Параллелограммъ, стороны котораго равны и параллельны AB и CK, равновеликъ параллелограмму, стороны котораго равны и параллельны GE и CI; площадь каждаго изъ этихъ параллелограммовъ равна суммѣ или разности площадей параллелограммовъ CADE и CBFG.

5. *Sur les podaires de parabole.*

6. *Théorèmes sur les coniques.*

Solutions de questions proposées. №№ 635, 677, 799, 816, 872, 936, 943, CCXIII.

Questions d'examen. №№ 694—697.

Questions proposées. №№ 1031—1038.

1895. — № 10.

Sur les valeurs principales des radicaux. Par M. *De Tilly* (Suite). При извлеченіи корней изъ дѣйствительныхъ количествъ, главное (или простѣйшее) выраженіе корня опредѣляется слѣдующими условіями:

1) Главный корень степени m изъ положительнаго количества a есть ариѳметическое значеніе корня со знакомъ $+$.

2) Главный корень степени m изъ отрицательнаго количества $-a$, при m нечетномъ, есть ариѳметическое значеніе корня изъ a, умноженное на $+\sqrt{-1}$.

Обобщая эти условія для корней изъ мнимыхъ количествъ и полагая

$$\sqrt[m]{a+b\sqrt{-1}}=\sqrt[m]{\sqrt{a^2+b^2}}.\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{m}+\sqrt{-1}.\sin\frac{\varphi+2k\pi}{m}\right),$$

гдѣ

$$\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\ 0<\varphi<2\pi,$$

авторъ изслѣдуетъ, при какихъ значеніяхъ перемѣнной k вторая часть этого равенства служитъ главнымъ выраженіемъ корня.

Bibliographie. L'Arithmétique amusante, par *Ed. Lucas.* Paris. 1895. Prix. 7 fr. 50.

Agrégation des sciences mathématiques (élémentaires. 1895) Вершины тр-ка T′ суть ортогональныя проэкціи точки M на стороны тр-ка T.

1) Доказать, что при перемѣщеніи точки M по нѣкоторой прямой Δ стороны тр-ка T′ обвертываютъ три параболы P, P_1, P_2

2) При какомъ положеніи прямой Δ директриссы параболъ P, P_1, P_2 пересѣкаются въ одной точкѣ.

3) Доказать, что при вращенiи прямой Δ около постоянной точки k директриссы параболъ P, P_1, P_2 проходятъ соотвѣтственно черезъ постоянныя точки I, I_1, I_2.

4) При какомъ положенiи точки k точки I, I_1, I_2 находятся на одной прямой?

J. N. даетъ указанiя для элементарнаго рѣшенiя этихъ вопросовъ.

Note sur un article de Mathesis. Par M. *Droz-Farny*. По поводу замѣтки Neuberg'a о коническихъ сѣченiяхъ въ плоскости тр-ка (Math. 1895, № 3) M. Droz-Farny сообщаетъ слѣдующее.

I. Пусть P есть перемѣнная точка на сторонѣ BC тр-ка ABC; P_1 и P_2 — ея проэкцiи на стороны CA и AB; A'—основанiе перпендикуляра изъ A на BC; β и γ—проэкцiи A' на AC и AB. При перемѣщенiи точки P по BC прямая P_1P_2 обвертываетъ параболу, имѣющую фокусъ въ A; прямая $\beta\gamma$ касается этой параболы въ ея вершинѣ.

II. Пусть P есть какая нибудь точка въ плоскости тр-ка ABC; P_1, P_2, P_3—ея проэкцiи на стороны BC, CA, AB. Если прямая P_2P_3 дѣлится пополамъ прямою PP_1, то AP есть симедiана тр-ка (*Соллертинскiй*). Отсюда выводятся слѣдствiя:

1) Точка Lemoine'a есть центръ тяжести тр-ка, вершины котораго суть проэкцiи этой точки на стороны главнаго тр-ка.

2. Если изъ точки пересѣченiя D симедiаны угла A съ описанной около тр-ка окружностью опустить перпендикуляры DD_1, DD_2, DD_3 на стороны тр-ка, то D_1 есть средина прямой D_2D_3 (*J. Van Haarst*).

Прямая $D_1D_2D_3$ обвертываетъ параболу, вписанную въ тр-къ; фокусъ этой параболы въ точкѣ D, а директриссой ея служитъ перпендикуляръ изъ ортоцентра тр-ка на медiану его, проведенную изъ вершины A.

Notes mathématiques 4. *Note additionnelle á la question 635* (*J. N.*). 15. *Remarque relative á la question 928*. (*Barbarin*).

Solutions de questions proposées. №№ 681, 890, 913, 914, 922, 941.

№ 681. Пусть A', B', C' суть пересѣченiя окружности, описанной около тр-ка ABC съ его медiанами (или высотами). Прямыя, соединяющiя точку Tarry N съ вершинами тр-ка ABC, пересѣкаютъ соотвѣтственныя стороны тр-ка A'B'C' на прямой, проходящей черезъ центръ тяжести G (или ортоцентръ) и точку Lemoine'a K тр-ка ABC. (*E. Cesaro*).

№ 941. Во всякомъ тр-кѣ ABC

$$abc + (a-b)(b-c)(c-a) = 4Rr(a.\cos C + b.\cos A + c.\cos B),$$
$$abc - (a-b)(b-c)(c-a) = 4Rr(a.\cos B + b.\cos C + c.\cos A).$$

(*Mandart*).

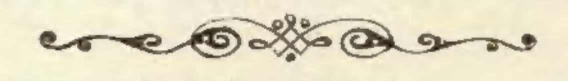
Изъ этихъ равенствъ черезъ непрерывное преобразованiе относительно A (*transformation continue*) M. *Lemoine* выводитъ соотношенiя:

$$abc + (a+b)(a-c)(c+a) = 4Rr_a\ (a.\cos B - b.\cos A - c.\cos B).$$
$$abc - (a+b)(b-c)(c+a) = 4Rr_a\ (a.\cos B - b.\cos C + c.\cos B).$$

Questions d'examen. №№ 698—701.

Questions proposées. №№ 1039—1042.

Д. Е.



Редакторъ-Издатель Э. К. Шпачинскiй.

Дозволено цензурою. Одесса, 13-го Iюля 1896 г.

„Центральная типо-литографiя", уг. Авчинникова пер. и Почтовой ул., д. № 39.